Grundzüge der Himmelsmechanik

Die Himmelsmechanik ist ein Teilgebiet der Astronomie und beschreibt die Bewegungen der Gestirne unter dem Einfluss der Gravitation (allgemeine Massenanziehung). Sie gehört zu den klassischen Gebieten der Sternkunde. Grundlage hierfür sind die von Isaac NEWTON (1643 – 1727) aufgestellten Axiome der Mechanik und sein universelles Gravitationsgesetz. Die Himmelsmechanik erlaubt die Berechnung des Gestirnlaufes in Vergangenheit und Zukunft mit hoher Genauigkeit. Bei besonders hohen Anforderungen an die Präzision der Ortsbestimmungen, beispielsweise in der Raumfahrt oder bei großen Zeiträumen sind Abweichungen von der *Newtonschen Mechanik* zu berücksichtigen. Relativistische Effekte spielen eine nicht mehr zu vernachlässigende Rolle. An Stelle der klassischen Mechanik treten Rechenvorschriften der *Allgemeinen Relativitätstheorie* (ART) von Albert EINSTEIN (1879 – 1955).

Die **Newtonschen Axiome** lauten:

1. Gesetz der Trägheit: Wirkt auf einen Körper keine Kraft ein, so beharrt er in seinem Bewegungszustand.
2. Gesetz der Kraft: Eine auf einen Körper wirkende Kraft erteilt ihm eine der Kraft proportionale Beschleunigung oder Verzögerung (= negative Beschleunigung).Die von einer Kraft bewirkte Beschleunigung ist der Masse proportional (Kraft = Masse mal Beschleunigung). Die Richtung der Beschleunigung ist gleich der Kraft.
3. Actio = Reaction: Übt ein Körper auf einen anderen eine Kraftwirkung aus, so wirkt der zweite Körper auf den ersten mit gleich großer Kraft aber in entgegengesetzter Richtung.

Nach NEWTON ziehen Massen einander an. Für den einfachen Fall zweier Körper mit den Massen M_1 und M_2, deren Durchmesser klein gegenüber ihrer Entfernung r sind (Idealfall: zwei Massenpunkte M_1 und M_2), wirkt eine anziehende Kraft K, die sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz errechnet zu:

$$K = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$$

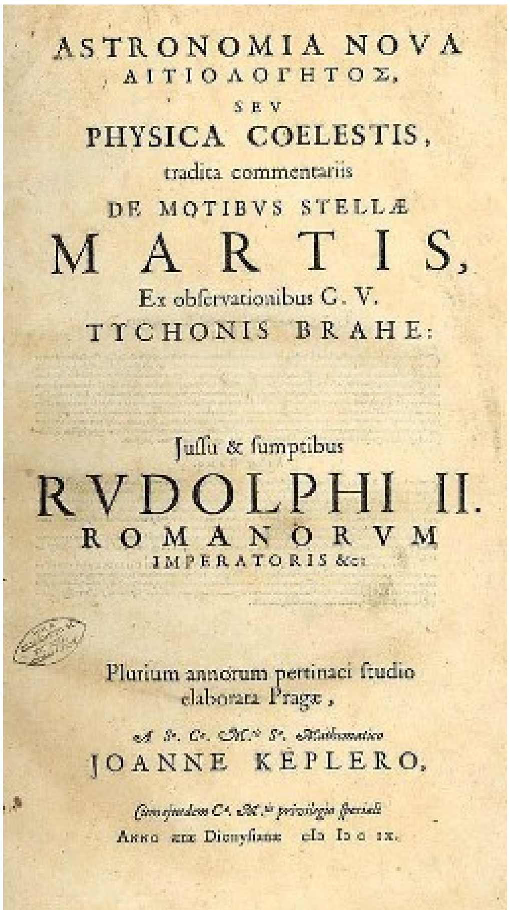
Der Proportionalitätsfaktor G wird dabei als *Newtonsche Gravitationskonstante* bezeichnet. Es ist davon auszugehen, dass sie universell gilt und zeitunabhängig ist (dG/dt = 0). Ihr Wert lautet:

$$G = 6{,}672 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm^3/g \cdot s^2} = 6{,}672 \cdot 10\text{-}11\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}\ \text{(SI-Einheiten)}$$

In der Himmelsmechanik wird oft auch die *Gaußsche Gravitationskonstante* benutzt (Definition siehe weiter unten).

Zweikörperproblem

Die Bewegung zweier Körper in ihrem gemeinsamen Gravitationsfeld lässt sich besonders einfach beschreiben, da nicht so viele Einflussgrößen vorhanden sind. Im *Zweikörperproblem* stellt sich die Aufgabe, die Bewegungsgleichungen für beide Körper aufzustellen und zu lösen. Beim Zweikörperproblem sind geschlossene algebraische Lösungen vorhanden. Ein einfach zu lösender Sonderfall des Zweikörperproblems liegt vor, wenn beinah die gesamte Masse in einem Körper konzentriert ist und die Masse des zweiten Körpers sehr klein im Vergleich zum ersten Körper (Zentralmasse) ist. Der Schwerpunkt des Systems fällt dann fast mit dem des massereicheren Körpers zusammen. Der zweite Körper beschreibt dann eine Bahn um den als ruhend anzusehenden Zentralkörper (Zentralbewegung). Dieser Fall ist in unserem Sonnensystem mehrfach verwirklicht. Die massearmen Planeten laufen um die Sonne (Zentralmasse), die Monde wiederum umrunden die Planeten. Johannes KEPLER (1571 – 1630) hat überwiegend aus den Beobachtungsdaten, die Tycho BRAHE (1546 – 1601) gesammelt hatte, seine drei Gesetze der Planetenbewegung aufgestellt und in der ASTRONOMIA NOVA veröffentlicht.

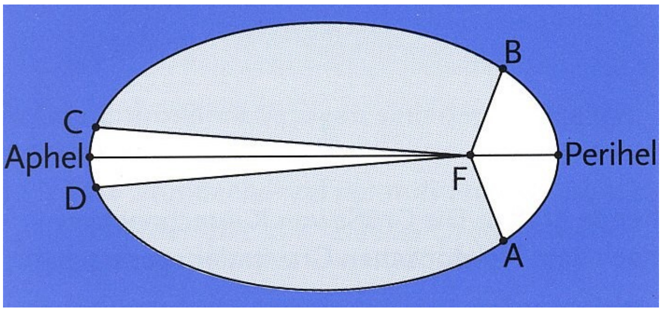

ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEU
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBUS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:
Juſſu & ſumptibus
RUDOLPHI II.
ROMANORUM
IMPERATORIS &c:
Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,
JOANNE KEPLERO,
Anno æræ Dionyſianæ

Johannes KEPLER und das Titelblatt der Astronomia Nova

Die **Keplerschen Gesetze** lauten:

1. Die *Bahnen der Planeten sind Ellipsen*, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (Gesetz von der Bahnform). Dieses Gesetz gilt allgemein auch für Kometen, Meteoride, Monde, künstliche Satelliten usw. Allgemein formuliert lautet es:
   Bei einer Zentralbewegung beschreibt der zweite Körper im Gravitationsfeld des ersten Körpers (Zentralmasse) eine Kegelschnittlinie (Kreis, Ellipse, Parabel od. Hyperbel). Kreis und Parabel sind Sonderfälle (numerische Exzentrizität e = 0 bzw. e = 1), während Ellipse (e < 1) und Hyperbel (e > 1) die allgemeinen Fälle sind. Welche Bahn in einem konkreten Fall beschrieben wird, hängt vom Verhältnis der potentiellen Energie des zweiten Körpers (Planet, Mond usw.) zu seiner kinetischen Energie ab.

2. Der *Radius od. Leitstrahl (Verbindungslinie Sonne – Planet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen* → *Flächensatz*. Der Flächensatz folgt unmittelbar aus dem Energieerhaltungssatz und aus der Konstanz des Drehimpulses (=Trägheitsmoment mal Winkelgeschwindigkeit). Unter anderem ergibt sich aus ihm, dass die Planeten im Aphel (= Sonnenferne, Apogäum bei Mondbahn) am langsamsten, im Perihel dagegen (= Sonnennähe, Perigäum bei Mondbahn) am schnellsten laufen.



3. Die Quadrate der Umlaufzeiten (T) der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen (= große Halbachsen (a) ihrer Ellipsenbahnen) von der Sonne:

$$T_1^2 : T_2^2 : T_3^2 \ldots T_n^2 = a_1^3 : a_2^3 : a_3^3 : \ldots a_n^3$$

   oder:

$$T^2 / a^3 = \text{const.}$$

   Das Verhältnis vom Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung von der Sonne ist stets konstant. Die Größe der Konstante wird durch die Summe der Sonnenmasse (M, bzw. $M_\odot$) plus Planetenmasse (m) bestimmt. Es gilt:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{1}{M+m}$$

Das 3. Keplersche Gesetz erlaubt es, aus der Beobachtung der Planeten-Umlaufzeit die relativen Entfernungen im Sonnensystem zu bestimmen. Setzt man für die Erde T = 1 und a = 1, dann erhält man die mittleren Abstände (= große Halbachsen) der anderen Planeten in Astronomischen Einheiten (AE). Als Astronomische Einheit wird die mittlere Entfernung (=große halbe Bahnachse) der Erde von der Sonne genommen:

$$1AE = 149{,}60 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Beispiel: Jupiter läuft in knapp zwölf Jahren um die Sonne ($T_{Jupiter}$ = 12); für die Erde gilt T_{Erde} = 1 Jahr. Somit ergibt sich die mittlere Entfernung des Jupiters von der Sonne zu

$$a_{Jupiter} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2AE$$

Außerdem lässt sich aus dem 3. Keplerschen Gesetz, das allgemein für jede Zentralbewegung gilt, die Massensumme ermitteln. Kreist ein Mond oder künstlicher Satellit um einen Planeten, ergibt sich aus seiner Distanz und Umlaufzeit die Masse des Planeten (plus Mond bzw. Satellit).
Gibt man die Umlaufzeit in Tagen, die Masse in Sonnenmassen und die Länge der großen halben Bahnachse in AE an, so erhält man für die Newtonsche Gravitationskonstante G einen anderen Zahlenwert, den man nach Carl Friedrich GAUSS (1777 – 1855), dem berühmten Göttinger Mathematiker, als **Gaußsche Gravitationskonstante** (k) bezeichnet:

$$k = 0{,}0172021$$

wobei die Beziehung gilt:

$$G = k^2 \, AE^3 / M_\odot \, d^2$$

Wichtige Begriffe der Himmelsmechanik

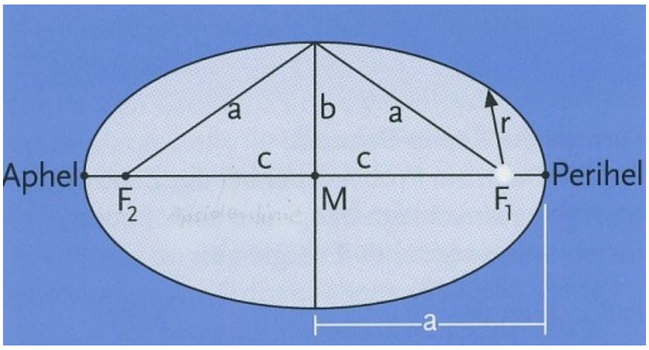
Sind *F1* und *F2* die Brennpunkte, M der Mittelpunkt sowie A und P die Scheitel der Ellipse an den Enden der großen Achse, a und b die große und die kleine Halbachse, so gelten folgende Beziehungen:

$$\text{Ellipsengleichung: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Lineare Exzentrizität: $c \triangleq \overline{FM}$ (Brennpunkt – Mittelpunkt)
Numerische Exzentrizität: $e = c/a$ und, da

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ist}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$



a und e bestimmen Größe und Form der Ellipse und gehören zu den *Bahnelementen* (siehe weiter unten).

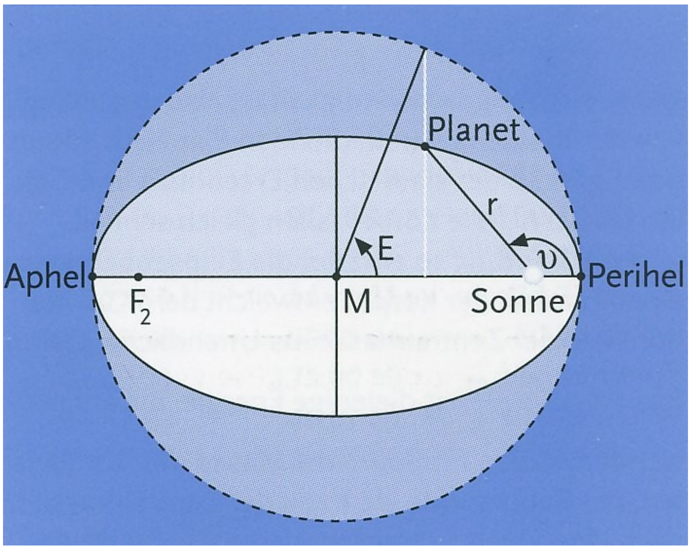
Steht die Sonne im Brennpunkt F_1, so ist der Abstand $\overline{F_1P}$ der Minimalabstand des Planeten (Perihel), der Abstand $\overline{F_1A}$ die größte Distanz (Aphel).

Periheldistanz: q = a (1–e), Apheldistanz: Q = a (1+e)

Die Strecke Aphel – Perihel $(\overline{AP} = 2a)$ wird **Apsidenlinie** genannt. Perihel und Aphel heißen **Apsiden**. Die heliozentrischen Positionen eines Planeten werden durch die sogenannte **Anomalie** angegeben. Man unterscheidet zwischen drei Anomalien:

υ = wahre Anomalie, E = exzentrische Anomalie, M_h = mittlere Anomalie

Die *wahre Anomalie* gibt den Winkel Perihel – Sonne – Planet an. Mit der Länge des Radius r und der wahren Anomalie υ ist die Position des Planeten in seiner Bahnebene bestimmt. Die wahre Anomalie wächst allerdings mit ungleichförmiger Geschwindigkeit und definiert deshalb die *mittlere Anomalie*. Sie ist der Winkel Perihel – Sonne – fiktiver (gedachter) Planet, der sich mit gleichförmiger (konst.) Geschwindigkeit um die Sonne bewegt und die gleiche Umlaufzeit wie der reale Planet hat.



Die mittlere Anomalie M_h wächst somit gleichförmig mit fortschreitender Zeit. Die Größe $n = 2\pi/T$ gibt die mittlere tägliche Bewegung des Planeten an.

$$M_h = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

Die mittlere Anomalie M_h und die **exzentrische Anomalie E** sind über die **Kepler-Gleichung** miteinander verbunden:

$$M_h = E - e \cdot \sin E$$

Mit e = numerische Exzentrizität.
Die Kepler-Gleichung muss iterativ gelöst werden, da sie transzendent ist. Die Berechnung von υ und r erfolgt nach den Gleichungen:

$$\tan\frac{\upsilon}{2} = \frac{1+e}{1-e}\tan\frac{E}{2}$$ und $$r = a\,(1 - e \cdot \cos E)$$

Die *exzentrische Anomalie* wird aus der Kepler-Gleichung ermittelt.

Die drei Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung, die Johannes Kepler aufgrund empirischer Beobachtung fand, lassen sich aus den Gesetzen der Mechanik (Erhaltungssatz von Drehimpuls und Energie u. dem Gravitationsgesetz) ableiten. So ist die Summe potentieller (im Gravitationsfeld) und kinetischer Energie der Planetenbewegung stets konstant. Im Perihel hat E_{kin} ein Maximum, E_{pot} ein Minimum, während im Aphel die potentielle Energie einen Höchstwert, die kinetische jedoch ein Minimum erreicht (der Planet bewegt sich am langsamsten). Die Summe aus $E_{kin} + E_{pot}$ ergibt sich zu:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \left(G \cdot \frac{M \cdot m}{r}\right) = const$$

Ist die Zentrifugalkraft $\left(\frac{m \cdot v^2}{r}\right)$ gleich der Anziehungskraft $\left(G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}\right)$, so wird die Bahn zu einem Kreis. Die **Kreisbahngeschwindigkeit** ergibt sich zu:

$$v_K = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Die Kreisbahngeschwindigkeit ist also unabhängig von der Masse des umlaufenden Planeten (Mond usw.) gemäß der klassischen Erkenntnis von Galileo GALILEI: „Alle Körper fallen gleich schnell.“ Ist $E_{kin} = E_{pot}$, so entartet die Ellipsenbahn zu einer Parabel, der Körper entweicht dem Gravitationsfeld der Zentralmasse ins Unendliche. Denn $E_{pot} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$ ist diejenige

Energie, die aufgewendet werden muss, um die Masse m (des Planeten, der Raumsonde usw.) von der Zentralmasse M nach unendlich zu transportieren. Damit ergibt sich die **Entweichgeschwindigkeit** (auch **Fluchtgeschwindigkeit**) zu:

$$v_E = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}} = v_K \sqrt{2}$$

Die Entweichgeschwindigkeit ist identisch mit der Fallgeschwindigkeit aus dem Unendlichen. Die Bahngeschwindigkeit v_B in einem beliebigen Punkt der Ellipsenbahn ist gegeben durch:

$$v_B = \sqrt{G \cdot M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Insbesondere gilt:

Perihelgeschwindigkeit:

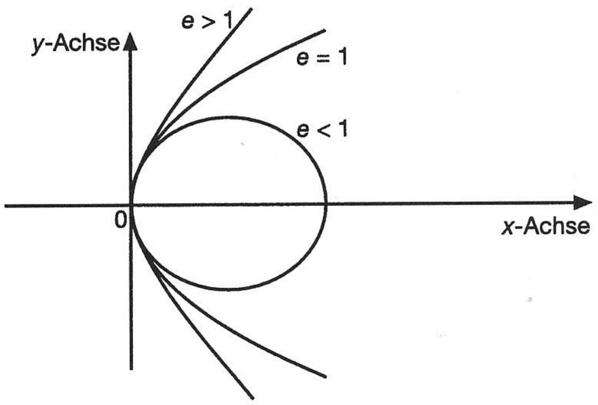
$$v_P = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \left(\frac{1+e}{1-e}\right)}$$

Aphelgeschwindigkeit:

$$v_A = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$$

Formen der Kepler-Bahnen:

Fall	Energieverhältnis	Num. Exzentr.	Kegelschnittlinie
1	$E_{kin} / E_{pot} < 1$	e < 1	Ellipse
		e = 0	Kreis
2	$E_{kin} / E_{pot} = 1$	e = 1	Parabel
3	$E_{kin} / E_{pot} > 1$	e > 1	Hyperbel



Bahnelemente

Die Bahnelemente bestimmen Größe, Form und Lage (Orientierung) der Bahn eines Planeten, Mondes, … im Gravitationsfeld der Zentralmasse bei einer Zentralbewegung. Aus den Bahnelementen lässt sich die Position des Planeten, Mond, … berechnen.

In der Himmelsmechanik stellen sich zwei Aufgabenkreise:

1. Ephemeridenrechnung

Aus bekannten Bahnelementen wird der (geozentrische) Ort eines Himmelskörpers, Planet usw. zum Zeitpunkt t ermittelt. Unter *Ephemeriden* versteht man die Angabe der Koordinaten eines Gestirns für einen bestimmten Zeitpunkt. Das Wort kommt aus dem Griechischen έφημερίς = Tagebuch.

2. Bahnbestimmung

Aus den Beobachtungen von Gestirnsörtern (Planeten, Kometen usw.) werden die Bahnelemente abgeleitet. Auf diese Weise wird gegebenenfalls die Bahn eines neuentdeckten Kometen bestimmt.

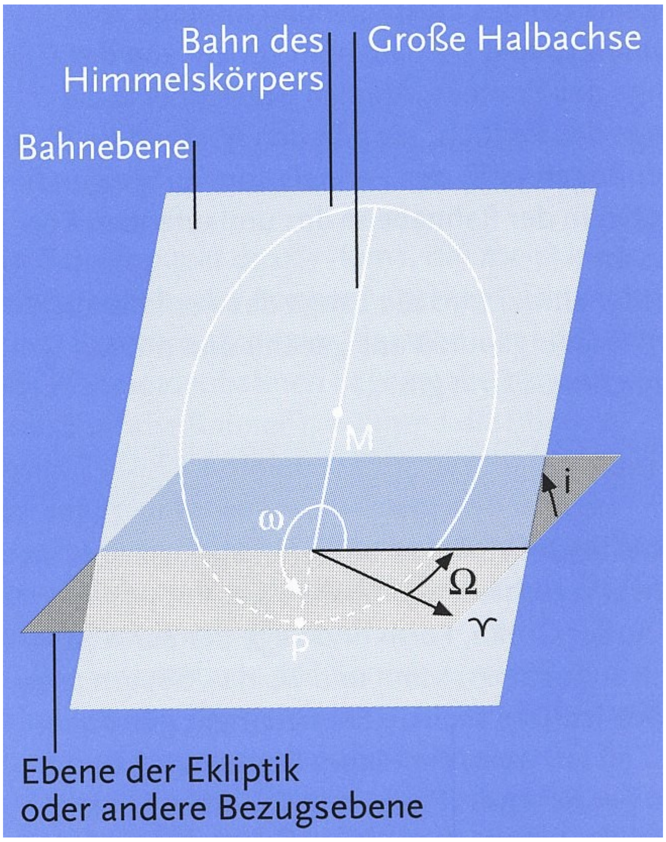
Für die Bahn eines Planeten, Mondes, … sind sechs Bahnelemente notwendig, um seine Zentralbewegung zu beschreiben:

a – Große halbe Bahnachse
e – Numerische Exzentrizität
i – Bahnneigung zu einer Referenzebene, normalerweise zur Ekliptik
Ω – Länge des aufsteigenden Knotens (Abstand des Knotens vom Frühlingspunkt V)
ω – Länge des Perihels (Abstand vom aufsteigenden Knoten)
t_0 – Perihelzeit od.
M_h – Mittlere Anomalie (zu einem bestimmten Zeitpunkt)

Die Größen a und e geben Form und Größe der Bahnellipse an. Die drei Winkel i, Ω und ω bestimmen die Lage der Ellipse im Raum. Die Bahnneigung i wird gewöhnlich zur Erdbahnebene, der Ekliptik, gemessen, i < 90° bedeutet rechtläufige, i > 90° retrograde Bewegung im Sonnensystem. Die Bahnen der großen Planeten haben nur geringe Neigungen zur Ekliptik (i < 10°, Ausnahme Pluto i = 17°).

Die Schnittpunkte einer Bahn mit der Ekliptik (Referenzebene) werden **Knoten** genannt. Im aufsteigenden Knoten wechselt das Gestirn von der Südseite zur Nordseite der Ekliptik (positive ekliptikale Breiten). Ω gibt den Abstand in Grad od. Bogenmaß des aufsteigenden Knotens vom **Frühlingspunkt** (V) an. Man spricht von der Länge des Knotens. Ähnlich bezeichnet ω die Länge des Perihels, sie gibt den Abstand in Grad od. Bogenmaß des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Bahnebene des umlaufenden Körpers an.
Manchmal wird die Länge des Perihels auch vom Frühlingspunkt aus gezählt und mit ώ bezeichnet. Dann gilt $\acute{\omega} = \Omega + \omega$

wobei beide Winkel zu addieren sind, obwohl sie in zwei verschiedene Ebenen gezählt werden. Außer Größe, Form und Lage der Bahn ist noch anzugeben, wann und wo das Gestirn anzutreffen ist. Das sechste Bahnelement gibt daher die Zeit an, wann ein Planet (Komet usw.) durch sein Perihel läuft (Perihelzeit t_0). Statt t_0 kann auch die mittlere Anomalie M_h als sechstes Bahnelement vermerkt werden. Genaugenommen gehört die Umlaufzeit T noch als siebtes Bahnelement aufgeführt. Die Umlaufzeit ergibt sich jedoch aus dem dritten Kepler-Gesetz unter der Voraussetzung, dass die Massensumme (Zentralmasse + umkreisender Körper) bekannt ist. Bei nicht zu vernachlässigender Masse der Planeten muss das 7. Bahnelement gesondert berücksichtigt werden.



Drei- und Mehrkörperproblem / Störungen

Sind mehr als zwei Körper im Spiel, was im Sonnensystem stets der Fall ist, so lassen sich für ihre Bewegungen im allgemeinen Fall keine algebraischen Lösungen mehr angeben. Die Bewegungen der Körper müssen *numerisch* berechnet werden durch fortgesetzte (iterative) Integration der Bewegungsgleichungen.

Für spezielle Fälle lassen sich jedoch algebraische Lösungen angeben, wenn beim Dreikörperproblem die Masse eines Körpers gegenüber den beiden anderen vernachlässigbar klein ist oder wenn er bestimmte Positionen einnimmt (Lagrange Librationspunkte).

Da fast die gesamte Masse des Sonnensystems im Zentralkörper Sonne vereinigt ist, beschreiben die Planeten in erster Näherung Kepler-Bahnen (Ellipsen).

Bei der Berechnung der Planetenbahn kann man so verfahren, dass man die gravitativen Einflüsse der anderen Planeten als mehr oder weniger kleine Störungen der Planetenbewegung in seiner Ellipse auffasst. Diese Störungen verändern die Ellipsenbahn ein wenig, was dadurch ausgedrückt wird, dass die Bahnelemente zeitlich variieren (*Methode der Variation der Bahnelemente*). Dabei gibt es kurzfristig periodische, langfristig periodische und säkulare Variationen der Bahnelemente. Die **mittleren Bahnelemente** beschreiben die ungestörte Planetenbahn. Durch die Störungen wird sie verändert. Man wählt eine Ellipsenbahn, die sich der veränderten Bahn am besten anschmiegt. Die Bahnelemente dieser angeschmiegten Bahn werden **oskulierende Elemente** genannt. Man ermittelt die oskulierenden Elemente aus den mittleren, durch *Reihenentwicklung mit Störelementen*, wobei als Zeiteinheit das *Julianische Jahrhundert* (=36525 Tage) verwendet wird, zum Beispiel:

$a = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + a_3 \cdot T^3 + \ldots$
$i = i_0 + i_1 \cdot T + i_2 \cdot T^2 + i_3 \cdot T^3 + \ldots$

a und i sind die oskulierenden Elemente (große halbe Achse und Neigung) für ein bestimmtes Datum, $T = (JD_0 - JD) / T$, wobei JD_0 das Startdatum ist, ab dem die Einflüsse der Störungen zu berücksichtigen sind, a_1, … a_n sowie i_1 … i_n sind die Störterme. a_0 und i_0 sind die zum Startdatum gültigen Bahnelemente.

Im Zeitalter der Computer bereitet es keine allzu große Mühe, auch größere Rechenarbeiten in Sekundenschnelle zu erledigen. Gute Astronomieprogramme erlauben es heute, in kurzer Zeit Gestirnpositionen (Ephemeriden) mit hinreichender Genauigkeit zu ermitteln.